

## **ПРОБЛЕМА «ОБЪЕКТИВНОГО» КРИТЕРИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПРИ ВЫБОРЕ СТРАТЕГИИ ПОВЕДЕНИЯ**

**Кузенков О. А.**

(Россия, Нижний Новгород)

*Целью этой статьи является изучение математических моделей, которые объясняют процесс формирования «объективного» критерия. Единственным критерием поведения системы является ее непротиворечивое существование, все остальные критерии либо подчинены этому, либо являются внешними и задаются более общей системой. Формализация такого критерия сталкивается с рядом серьезных затруднений. Показывается, как можно определить такой критерий в системе самовоспроизводящихся объектов.*

Оптимизация поведения реальной системы неизбежно требует формализации критерия оптимальности. В теории оптимизации обычно не обсуждается вопрос о том, из каких соображений он задается. Однако для практики этот вопрос имеет огромное значение. Для того чтобы принимаемое в соответствии с избранным критерием оптимальное решение имело практический смысл, нужно, чтобы критерий содержал информацию о реальной эффективности каждой возможной альтернативы поведения. Математическая постановка оптимизационной задачи с определением множества альтернатив поведения и заданием на них критерия оптимальности в виде некоторого формального функционала является не исходным пунктом решения реальной проблемы оптимизации, а уже некоторым итогом ее решения.

Если проблема оптимизации единична и уникальна, отсутствует возможность изучения вариантов поведения и сравнения

данной задачи с аналогичными, то такая проблема, вообще говоря, неразрешима. Получать информацию о вариантах поведения можно, если проблема оптимизации систематически повторяется (тогда информацию о предыдущих решениях можно использовать в дальнейшем) или если каждый вариант поведения не носит окончательного характера, и на основе опыта его использования можно изменять принятое решение.

Вопрос о том, каким критерием должна руководствоваться система при выборе своего поведения, неоднократно рассматривался как для отдельных классов систем (например, биологических) в соответствующих дисциплинах [1], так и для общего случая в общей теории систем [2, 3].

После Второй мировой войны, когда стали очевидными успехи формальной теории оптимизации в решении проблем военного времени, указанная проблема становится центральной для системного анализа. В 50–60-е годы усилиями основоположников системного анализа была сформулирована основная концепция, которая предполагала, что любая человеческая (и вообще «разумная») деятельность может быть отнесена к системе поиска цели. Эта парадигма была кратко выражена в 1967 году одним из ее разработчиков Р. Акофом: «Все проблемы, в конечном счете, сводятся к оценке эффективности альтернативных способов действия для определенного множества целей» [3]. Акофом была предпринята попытка аксиоматического описания целеустремленной системы и сведения к предложенной схеме всех проблем, связанных с выбором поведения. Так, он дает следующее определение личности: «Личность – математическая функция, связывающая ожидаемую удельную ценность в любой ситуации выбора со свойствами всевозможных способов действий, их возможных результатов, и существенными переменными окружения» [2]. При этом естественно считалось, что цели конечны, достижимы за ограниченное время, легко формализуемы. Стремление к достижению этих конечных целей было образно названо Г. Викерсом «поиском концов».

Однако, как показала жизнь, подобный подход хорошо работал только в искусственных, вырожденных ситуациях, подобно игре в шахматы. Там можно было формально определить цель – выигрыш, использовать известные логические правила игры. Но проблемные ситуации реального мира являются намного более сложными. Здесь формулировка цели зачастую неоднозначна и неочевидна. Поэтому с течением времени первоначальные упрощенные представления претерпели существенную корректировку. Изменение парадигмы системного анализа связано с именем Г. Викерса. В 1974 году он пришел к выводу, что в описании человеческой деятельности парадигма поиска конечной цели является неадекватной. Деятельность по регулированию в общественном и производственном управлении или в частной жизни состоит не в достижении каких-то конечных целей, а в поддержании желаемых отношений или избегании нежелательных. В книге «Свобода в колебаниях лодки» Г. Викерс пишет: «Жизнь состоит из опыта более, чем из поиска целей или «концов». Цель не может быть более средства: это возможность для вступления в новые отношения. Получить работу или жениться – не цель. Цель состоит в том, чтобы выполнять работу или жить с женой» [4]. Это привело к изменению представлений о происхождении и содержании критериев успешного поведения.

Одна из основных идей современного системного анализа состоит в том, что единственным собственным критерием поведения системы является ее неограниченное непротиворечивое существование; все остальные критерии либо подчинены этому, либо являются внешними, задаваемыми иными системами [4]. Это хорошо согласуется с традиционными представлениями философии, этики, психологии. «Всякая вещь, насколько от нее зависит, стремится пребывать в своем существовании (бытии).» Это стремление есть «действительная сущность самой вещи» [5, с. 359–618]. «Все существующее ценно, и поэтому утверждает и отстаивает себя... Истинно совершенно только то, что существует ради себя самого... Мы познаем, чтобы познавать, любим, чтобы любить, хотим, чтобы хотеть» [6, с. 32, 36]. «Имманентное

свойство любой живой субстанции – жить и сохраняться в жизни» [7, с. 278].

Сходные представления разделяет и современная синергетика: «Целью каждого элемента является сохранение своей информации. Это положение применимо как к неживым объектам, так и к живым. Применительно к живым объектам, в частности, к биологической эволюции, цель – сохранение своей информации – представляется очевидной. Она в зависимости от ситуации соответствует выживанию индивидуума или вида...» [8, с. 106].

Но при ближайшем рассмотрении оказывается, что такой критерий в отличие от конечных, простых целей первоначальной концепции неудобен при выборе поведения. Если на всех вариантах поведения критерий принимает одно и то же значение, то задача оптимизации бессмысленна. Оптимизировать поведение с точки зрения данного критерия имеет смысл только тогда, когда множество альтернатив содержит как варианты поведения, при которых система существует неограниченное время, так и варианты, когда она разрушается за конечное время. Но время существования реальных объектов всегда, как правило, ограничено. Следовательно, нет смысла выбирать поведение по указанному критерию: «Летай иль ползай, конец известен – все в землю ляжет, все прахом будет» (М. Горький). Кроме того, экспериментально можно работать только с конечными отрезками времени, и даже если какой-то вариант поведения может обеспечить бесконечное существование, проверить это на практике не представляется возможным.

Выход из этого затруднения состоит в том, что понятие бесконечного времени, необходимое для введения критерия, является математической абстракцией (как и понятие, например, геометрической прямой), отражающей тот факт, что рассматриваемое время много больше времени адекватности изучаемой модели. Это можно пояснить на примере определения критериев для лечения. Очевидно, что любой живой организм рано или поздно

погибнет. Но, рассматривая успешность того или иного способа лечения, обычно отвлекаются от этой непреложной истины, считая, что при одних способах поведения в условиях данной болезни время существования организма будет существенно превышать обозримые границы, а при других (неправильных способах лечения) организм погибнет в ближайшем будущем. Абсолютизация конечности времени существования приводит к тому, что лечение (и вообще выбор поведения) становится бессмысленным. Тогда будет справедливым известное юмористическое утверждение, что «огурцы есть вредно» – ведь 99% заболевших раком хотя бы раз в жизни ели огурцы.

Есть еще одна проблема при использовании указанного критерия. Интересующая систему информация о варианте поведения состоит лишь в следующем: возможно ли бесконечное существование системы при осуществлении этого варианта поведения или нет. Получить эту информацию система может, только реализовав его. Но если, проверяя данный вариант, система разрушается за конечное время, то принимать решение больше будет некому. Кроме того, в некоторых системах наблюдается саморазрушение. Например, существует механизм «самоубийства» живых клеток.

Такие, казалось бы, неразрешимые противоречия можно обойти в системе самовоспроизводящихся объектов. Здесь каждый вариант поведения осуществляется отдельным объектом; те объекты, поведение которых наиболее быстро приводит к собственному разрушению, исчезают из общей системы в первую очередь, и постепенно в системе остаются только те объекты, чье поведение может бесконечно долго поддерживать существование системы. Отдельные объекты могут изучать опыт других (даже избравших неправильный вариант и погибших при этом) и использовать его при выборе своего поведения – так создается возможность для изучения системой объективной ценности всех вариантов поведения и накопление информации о них. Таким об-

разом, система в целом может найти оптимальный вариант поведения. Рассмотрение системы самовоспроизводящихся объектов объясняет и факты саморазрушения. Поведение отдельных объектов (например, клеток) при определенных условиях может быть направлено даже на саморазрушение, если это приводит к выживанию системы в целом (например, организма).

Здесь решается и проблема бесконечного времени: хотя время существования каждого отдельного объекта конечно, но время существования всей системы может быть бесконечным (в рамках адекватности рассматриваемой модели).

В этом случае критерий допускает следующую простую формализацию. Пусть задано множество  $M$ , состоящее из  $n$  элементов. Это могут быть биологические виды, генотипы, экономические предприятия, виды товара, виды технических решений или устройств, научные публикации, политические партии, участвующие в выборах, варианты поведения и т.п. Поставим в соответствие каждому  $i$ -му элементу множества  $M$  действительную величину  $z_i$ , количественно отражающую существование его в системе в данный момент времени так, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{i=1}^n z_i = 1, \quad z_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

и  $z_i = 0$ , если  $i$ -й элемент в системе отсутствует. Величинами  $z_i$  могут быть удельные численности видов, удельные количества капиталов, занятых в производстве, удельные количества произведенных или реализованных товаров, частоты использования технических решений, частоты цитирования научных трудов, рейтинги политических партий, вероятности выбора вариантов поведения и т.п. Например, если элементами множества  $M$  являются биологические виды, сосуществующие в общем ареале обитания,  $q_i(t)$  – количество особей  $i$ -го вида в данный момент време-

ни, то в качестве величины  $z_i(t)$  целесообразно взять удельную численность  $z_i(t) = q_i(t) / \sum_{j=1}^n q_j(t)$ . Переход к удельным числен-

ностям во многих случаях очень удобен и широко используется при исследовании моделей биофизики [9]. Нетрудно видеть, что величины  $z_i$ , удовлетворяющие условиям (2), определяют вероятностную меру на конечно-точечном множестве  $M$ . Если с течением времени будет справедливо соотношение  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) / z_j(t) = 0$ , то  $i$ -й элемент будет постепенно вытесняться из общей системы  $j$ -м элементом. Можно утверждать, что  $j$ -й элемент лучше соответствует условиям существования в системе, чем  $i$ -й. Объективным критерием для выбора поведения  $i$ -го элемента будет предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) \quad (3)$$

(если он существует) или в более общем случае временное среднее

$$\langle z_i \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T z_i(t) dt . \quad (4)$$

Если скорости  $G_i$  изменения величин  $z_i$  во времени являются непрерывными функциями для всех  $i$  от 1 до  $n$ , то величины  $z_i$  удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$z_i' = G_i(t, z_1, \dots, z_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

Уравнения (5) задают динамику вероятностной меры на множестве  $M$ .

Наряду с рассмотренными пределами можно исследовать средневременное значение удельной скорости воспроизводства  $i$ -го элемента:

$$J(z_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{G_i}{z_i} dt . \quad (6)$$

Очевидно,

$$J(z_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{z_i'}{z_i} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\ln z_i)' dt =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (\ln z_i(T) - \ln z_i(0)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln z_i(T)}{T}.$$

Если существуют оба предела (3) и (6), то из того, что первый достигает наибольшего значения 1, вытекает, что второй также достигает наибольшего значения 0; увеличение второго никогда не может привести к уменьшению первого.

Отсюда следует, что первый критерий сильнее второго (в области их общего существования). Однако нередко на практике удобнее в качестве критерия использовать  $J(z_i)$ . В частности, именно через него формулируется в биологии критерий приспособленности биологического вида (как средневременной коэффициент размножения) [10]. «Коэффициент размножения в данных условиях – единая мера оптимальности» [11, с. 55].

Если  $i$ -й элемент обладает возможностью влиять на скорость изменения величин  $z_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , – управлять ими, то объективно оптимальным управлением для него будет то, которое обеспечивает максимум указанных пределов (3), (4), (6). Если при любом управлении пределы (3), (4) равны нулю, то задача оптимизации бессмысленна. Абсолютно наилучшим будет то управление, при котором пределы (3), (4) равны единице. В этом случае  $i$ -й элемент вытесняет из системы всех остальных. Не уменьшая общности, можно считать, что  $i=1$ , т.е. рассматривать задачу с точки зрения первого элемента.

Таким образом, можно поставить задачу оптимального управления для процесса, описываемого уравнениями (5). Соответствующие пределы на бесконечном времени (3), (4), (6) будут играть роль критерия качества управления. Условия (2) приводят к фазовым ограничениям типа равенства и неравенства.



Такой подход нередко позволяет объяснить многие непонятные до этого особенности поведения живых организмов. Так, Менджел и Кларк, рассматривая поведение как решение оптимизационной задачи с критерием (6), смогли дать разумное объяснение охотничьему поведению львов, миграциям водных организмов, характеру распределения корма и размеру кладки у птиц и т.п. [12].

Математические аспекты вышеизложенной методики постановки задачи оптимизации и введения критерия оптимальности был подробно рассмотрен в [13–19]. В работах [14, 15] также изучались свойства динамических систем (5), фазовым пространством которых является конечномерный симплекс (2). При этом были получены следующие основные результаты.

Любую систему (5) на симплексе (2) можно представить в виде

$$z'_i = F_i(z) - z_i \sum_{j=1}^n F_j(z), \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

где  $F_i$  – положительно однородные квазиположительные функции.

Для того чтобы решения уравнения (7) удовлетворяли условию  $z_1(t) \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow +\infty$ ,  $z_1(0) \neq 0$ , необходимо и достаточно, чтобы на решении уравнения выполнялось равенство

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{F_1}{z_1} - \frac{F_i}{z_i} \right) dt = +\infty$$

при всех  $i = \overline{2, n}$ ,  $z_i(0) \neq 0$ . В частности, это имеет место при условии

$$\langle F_1/z_1 \rangle > \langle F_i/z_i \rangle, \quad i = \overline{2, n}.$$

При этом величину  $\langle F_i/z_i \rangle$  также можно взять в качестве критерия, эквивалентного (6).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розен Р. Принцип оптимальности в биологии. М.: Мир, 1969.
2. Акоф Р., Эмери Ф. О целеустремленных системах. М.: Советское радио, 1974.
3. Chekland P. From optimizing to learning a development of systems thinking for the 1990-s // J. oper. res. soc. 1985. V 36. N 9. P. 757–767.
4. Vickers G. Freedom in a Rocking Boat. London: Allen Lane, 1970.
5. Спиноза Б. Этика. Ч. 3. Избр. произв. Т. 1. М., 1957.
6. Фейербах Л. Сущность христианства. М.: Мысль, 1965.
7. Фромм Э. Душа человека. М.: Транзиткнига, 2004.
8. Чернавский Д.С. Синергетика и информация. Динамическая теория информации. М.: Едиторал. УРСС. 2004.
9. Пых Ю.А. Равновесие и устойчивость в моделях популяций. М.: Наука, 1983.
10. Горбань А.Н. Обход равновесия. Новосибирск: Наука, 1984.
11. Горбань А.Н., Хлебопрос Р.Г. Демон Дарвина: идея оптимальности и естественный отбор. М.: Наука, 1988.
12. Менджел М., Кларк К. Динамические модели в экологии поведения. М.: Мир, 1992.
13. Kuzenkov O.A. Mathematical modelling for the process of "objective" criterion forming // VI International Congress on Mathematical Modelling, September 20–26, 2004, Nizhny Novgorod, Russia. Book of Abstracts. P. 97.
14. Кузенков О.А. Математическое моделирование процессов отбора // Математическое моделирование и оптимальное управление. Сб. научн. тр. под ред. Р.Г. Стронгина. Н. Новгород. 1994. С. 120–131.
15. Кузенков О.А. Исследование квазитермодинамического поведения систем на конечномерном симплексе // Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1997. С. 67–75.
16. Кузенков О.А. Проблема критерия в математическом моделировании процесса выбора для биологических систем // Математическое моделирование и оптимальное управление. Сб. научн. тр. под ред. Р.Г. Стронгина. Н. Новгород. 1996. С. 53–64.
17. Кузенков О.А. Математическое моделирование процесса выбора оптимальной стратегии: проблема критерия // Математическое моделирование и оптимальное управление. Сб. научн. тр. под ред. Р.Г. Стронгина. Н. Новгород. 1994. С. 48–59.

18. Кузенков О.А. О системах оценок объективного критерия //Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып.1(18). С. 116–125.
19. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Оптимальное управление за бесконечное время системой на единичном симплексе // Автоматика и телемеханика. 2005. N10. С. 70–79.

## **“OBJECTIVE” CRITERION PROBLEM FOR CHOISE OF OPTIMAL BEHAVIOR**

Kuzenkov O. A.

(Russia, Nizhniy Novgorod, NNSU)

*The purpose of this paper is to study mathematical models which explain the process of occurring and forming “objective” criterion. Unique own criterion of system behavior is its not inconsistent existence; all other criteria either are subordinated to this, or are external and are imposed by more common system. Formalization of such criterion faces a number of serious difficulties. There is showing that it is possible to define this criterion in system of self-regeneration objects.*